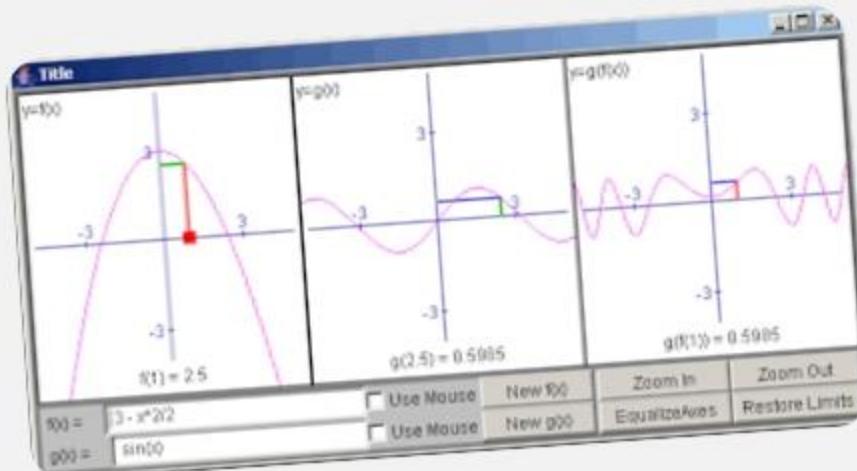


Mariana-Veronica Dumitrașcu

Aplicații *Mathematica* în rezolvarea unor probleme de analiză matematică



ISBN 978-606-30-2938-7

Editura Sfântul Ierarh Nicolae
2020

Cuprins

1. Limite de funcții	4
1.1 Noțiuni introductive	4
1.2 Limita unei funcții într-un punct	4
1.3 Funcții elementare	6
1.4 Limite remarcabile	12
2. Asimptote	13
2.1 Noțiuni introductive	13
2.2 Asimptota orizontală	13
2.3 Asimptota oblică	13
2.4 Asimptota verticală	14
3. Derivate	15
3.1 Derivata unei funcții într-un punct	15
3.2 Derivarea funcțiilor elementare	15
3.3 Teorema de derivare a funcției inverse.....	16
3.3.1 Consecințe ale teoremei de derivare a funcției inverse	17
3.4 Reguli de derivare	21
3.5 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	23
4. Primitive	25
4.1 Noțiuni introductive	25
4.2 Metode de calcul al primitivelor	26
4.2.1 Metoda integrării prin părți	26
4.2.2 A doua metodă de schimbare de variabilă	26
4.2.3 Integrarea funcțiilor rationale	26
5. Aplicații Mathematica	28
5.1 Aplicații. Limite	28
5.2 Aplicații. Derivate	37

5.3 Aplicații. Integrale	41
6. Concluzii	59

INTRODUCERE

În abordarea acestei lucrări am avut în vedere aplicarea unor conținuturi de analiză matematică prin intermediul programului Mathematica. Am pornit de la noțiuni teoretice despre limite de funcții, derivarea funcțiilor elementare, metode de integrare și am sfârșit prin a observa aplicabilitatea acestor concepte la clasă prin intermediul programului Mathematica.

În primă instanță voi aborda conceptul de trecere la limită, ce a fost formulat, pentru prima dată, de Isac Newton (1642-1727) și Gottfried Leibniz(1646-1716) fiecare în încercări diferite de a rezolva problemele de calcul. Contribuții importante aduce în acest domeniu și Leonhard Euler (1707-1783). El fundamentează conceptul de funcție. Descrieri verbale ale conceptului de limită au fost propuse de diferiți matematicieni, dar insuficiente pentru a fi utilizate în demonstrații. În 1821, Augustin-Louis Cauchy aduce argumente cu mai multă atenție decât predecesorii săi, dar cel care formulează definiția precisă a limitei este Karl Weierstrass (1815-1897). Aceasta este definiția pe care o utilizăm și astăzi.

De asemenea în lucrarea de față voi aminti și de alte noțiuni teoretice descoperite de alții matematicieni care au adus contribuții importante la dezvoltarea calculului diferențial și operației inverse, integrarea, după cum urmează: P. Fermat(1601-1665), M. Rolle (1652-1719), J.L.Lagrange (1736-1813), L'Hôpital (1661-1704), care a scris prima carte despre calcul diferențial "Analyse des infiniments petits" apărută în 1696 la Paris și în care se află și celebra regulă care-i poartă numele. Totuși regula a fost stabilită de Jean Bernoulli (1667-1748), matematician elvețian –din célébra familie de matematicieni Bernoulli care s-a ocupat de instruirea matematică a lui L'Hôpital, activitate pentru care era remunerat), B. Taylor (1685-1731), A.L. Cauchy (1789-1857), J.G. Darboux (1842-1917).

Astfel, utilizând de noțiunile teoretice descoperite de oamenii de știință mai sus menționăți, se poate observa importanța tratării acestei teme prin metode și aplicații variate cu ajutorul programului Mathematica, utile în predarea analizei matematice școlare.

Capitolul I

LIMITE DE FUNCȚII

1.1 Noțiuni introductive

Conceptul de limită a unei funcții într-un punct este fundamental în analiza matematică. Orice noțiune pe care o vom prezenta face referire la limită.

Pentru că un sir este o funcție $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$, vom studia comportarea lui pentru valori foarte mari ale lui n . Vom încerca să extindem această idee, analizând comportarea unei funcții $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, al cărei domeniul conține, în general, o mulțime arbitrară de numere reale pozitive. Graficul unui sir este format dintr-o mulțime infinită de puncte izolate. În contrast, funcțiile pe care le vom analiza au graficele de cele mai multe ori curbe continue. Dacă o astfel de funcție este definită pe o mulțime de forma $[0; \infty)$, atunci când x crește spre infinit prin valori reale, comportarea graficului este asemănătoare cu a sirului $(f(n))_n$ când n tinde la ∞ , prin valori întregi pozitive.

1.2 Limita unei funcții într-un punct

Se consideră o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct de acumulare pentru D (care poate să aparțină sau nu lui D).

Spunem că x_0 este punct de acumulare al mulțimii D dacă și numai dacă se poate găsi cel puțin un sir de elemente din D , diferite de x_0 , sir convergent la x_0 . Funcția f are limită $l \in \mathbb{R}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate V a lui l , există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $\forall x \in D \cap U, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$ sau oricare ar fi un sir $(x_n), n \geq 0$ din $D \setminus \{x_0\}$ având limita x_0 , rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l.$$

Teoremă Fie o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct de acumulare bilateral al domeniului D . Funcția f are limită în x_0 dacă și numai dacă

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x).$$

Teoremă Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție elementară și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D. Atunci,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

1.3 FUNCȚII ELEMENTARE

În analiza matematică sunt numite funcții elementare următoarele funcții: funcțiile polinomiale, funcțiile raționale, funcția radical, funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile trigonometrice directe (sin, cos, tg, ctg) și funcțiile trigonometrice inverse (arcsin, arccos, arctg, arcctg) precum și funcțiile obținute din acestea prin aplicarea succesivă, de un număr finit de ori, a operațiilor algebrice, a operației de compunere și a operației de inversare.

Dacă domeniul de definiție al unei funcții elementare nu este precizat, se subînțelege că el este format din toate punctele x pentru care au sens operațiile prin care este definită funcția. Acesta este domeniul maxim de definiție al funcției. O funcție elementară poate fi definită și pe o submulțime a domeniului maxim de definiție.

1. Limita funcției polinomiale

- a) Punctul de acumulare x_0 este finit, atunci limita funcției polinomiale se obține înlocuind x cu x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- b) Punctul de acumulare x_0 este infinit, atunci limita funcției este aceeași cu limita termenului de grad maxim

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_k \cdot x^k.$$

2. Limita funcției raționale

- a) Limita funcției raționale în punct de acumulare finit, în care nu se anulează numitorul, este egală cu valoarea ei în acel punct.
- b) Limita funcției raționale în punct de acumulare infinit, se rezolvă astfel:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l} (\pm\infty)^{k-l}, & \text{pentru } k > l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{pentru } k = l \\ 0, & \text{pentru } k < l \end{cases}$$

3. Limita functiei radical

- Radical de ordin par

Pentru $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$,

$$f(x) = \sqrt[2k]{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

și
 $x_0 \in [0; +\infty)$

punct de acumulare avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2k]{x} = \sqrt[2k]{x_0}.$$

Dacă $x_0 = \infty$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2k]{x} = \infty.$$

- Radical de ordin impar

Pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[2k+1]{x}, \quad x \in \mathbb{N}^*$$

și avem $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2k+1]{x} = \sqrt[2k+1]{x_0}$$

iar dacă

$$x_0 = -\infty,$$

atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2k+1]{x} = -\infty$$

și pentru

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2k+1]{x} = \infty.$$

4. Limita functiei exponentiale

Fie o functie $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$, $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$.

- Dacă $0 < b < 1$ atunci:

a) pentru $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} b^x = b^{x_0}$$

b) pentru $x_0 = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} b^x = \infty$$

c) pentru $x_0 = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} b^x = 0.$$

- Dacă $b > 1$, atunci :

a) Pentru $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} b^x = b^{x_0}$$

b) pentru $x_0 = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} b^x = 0$$

c) pentru $x_0 = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} b^x = \infty.$$

5. Limita functiei logaritmice

Se consider functia $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b x$, $b > 0$, $b \neq 1$.

- Dacă $0 < b < 1$ atunci:

a) pentru $x_0 = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x > 0} f(x) = \infty$$

b) pentru $x_0 \in (0, +\infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

c) pentru $x_0 = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

- Dacă $b > 1$, atunci:

a) pentru $x_0 = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x > 0} f(x) = -\infty$$

b) pentru $x_0 \in (0, +\infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

c) pentru $x_0 = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

6. Limitele funcțiilor trigonometrice directe

a) Funcția sinus

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

Limita funcției sin într-un punct de acumulare finit $x_0 \in \mathbb{R}$ se obține înlocuind pe x cu x_0 , iar dacă x_0 este punct de acumulare infinit, f nu are limită.

b) Funcția cosinus

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

Limita funcției cos într-un punct de acumulare finit $x_0 \in \mathbb{R}$ se obține înlocuind pe x cu x_0 , iar dacă x_0 este punct de acumulare infinit, f nu are limită.

c) Funcția tangentă

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} - \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Limita funcției tg într-un punct de acumulare din domeniul de definiție se obține înlocuind pe x cu x_0 .

Dacă $x_0 = \frac{\pi}{2}$, atunci

$$\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$$

d) Funcția cotangentă

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Limita funcției ctg într-un punct de acumulare din domeniul de definiție se obține înlocuind pe x cu x_0 .

$$\lim_{x \uparrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \operatorname{ctg} x = +\infty$$

7. Limitele funcțiilor trigonometrice inverse

a) Funcția arcsinus

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Dacă $x_0 \in [-1; 1]$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0.$$

b) Funcția arccos: $[-1; 1] \rightarrow [0, \pi]$

Dacă $x_0 \in [-1; 1]$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0.$$

b) Funcția arctangentă

$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$$

Dacă $x_0 = \infty$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Dacă $x_0 = -\infty$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

e) Funcția arccotangentă

$$\operatorname{arcctg} x: \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi)$$

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0$$

Dacă $x_0 = \infty$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg} x = 0$$

Dacă $x_0 = -\infty$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

Pentru toate funcțiile elementare, limita funcției în orice punct al mulțimii de definiție x_0 se obține înlocuind pe x cu x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

1.4 LIMITE REMARCABILE

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^t = e$$

$$\lim_{u(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u(x) \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u(x) \rightarrow 0} (1+u(x))^{u(x)} = e$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$5. \text{ Dacă } a = e, \text{ atunci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)}.$$

Capitolul II

Asimptote

2.1 Noțiuni introductive

Într-o exprimare superficială vom înțelege prin asimptotă o dreaptă verticală, orizontală sau oblică față de care graficul funcției “se apropie oricât de mult”. O astfel de problemă se poate pune pentru funcții ce au ramuri către infinit, adică funcții al căror grafic nu este conținut într-un dreptunghi.

Asimptotele sunt de trei feluri: orizontale, oblice și verticale.

2.2 Asimptota orizontală

Fie $f:D \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție, astfel încât $+\infty$ este punct de acumulare al domeniului. Dreapta $y = l$, unde $l \in \mathbb{R}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ pentru graficul funcției f dacă:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l.$$

Analog se definește asimptota orizontală spre $-\infty$.

2.3 Asimptota oblică

Fie $f:D \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție astfel încât $+\infty$ este punct de acumulare al domeniului. Dreapta $y = mx + n$, $m \neq 0$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f dacă

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

și

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

Analog se definește noțiunea de asimptotă oblică spre $-\infty$.

O funcție nu poate să aibă simultan asimptotă orizontală și oblică spre $\pm\infty$.

2.4 Asimptota verticală

Fie $f:D \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție, iar a un punct de acumulare al domeniului. Dreapta $x=a$ este asimptotă verticală la stânga pentru graficul funcției f dacă,

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \pm\infty.$$

Analog se definește noțiunea de asimptotă verticală la dreapta.

Capitolul III

Derivate

3.1 Derivata unei funcții într-un punct

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al domeniului, spunem că f are derivată în punctul x_0 dacă există limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

notată cu $f'(x_0)$.

Dacă derivata $f'(x_0)$ există și este finită se spune că f este derivabilă în punctul x_0 .

3.2 Derivarea funcțiilor elementare

1. Funcția constantă

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, unde c este un număr real dat.

Funcția constantă,

$$f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$$

este derivabilă pe \mathbb{R} și derivata sa este egală cu zero, adică

$$f'(x_0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Funcția identică

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Funcția identică este derivabilă pe \mathbb{R} și derivata sa este egală cu 1, adică

$$f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Funcția putere cu exponent natural

Se consider funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Funcția putere $f(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este derivabilă pe \mathbb{R} și derivata sa este egală cu

$$f'(x) = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Funcția radical de ordin n

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \forall x \in E, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ unde } E = [0; +\infty)$$

dacă n este par și $E = \mathbb{R}$, dacă $n =$ impar.

Funcția radical este derivabilă în orice punct, $x \neq 0, x \in E$ și derivata sa este egală cu

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n-1]{x^{n-1}}}, \forall x \neq 0.$$

În punctul $x = 0$ funcția radical nu este derivabilă, dar are derivata $f'(0) = +\infty$.

5. Funcția trigonometrică sinus

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Funcția trigonometrică sinus este derivabilă pe \mathbb{R} și derivata sa este egală cu

$$f'(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. Funcția trigonometrică cosinus

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Funcția trigonometrică cosinus este derivabilă pe \mathbb{R} și derivata sa este egală cu

$$f'(x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. Funcția logaritm natural

Se consideră funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x, \forall x > 0$.

Funcția logaritmică este derivabilă pe $(0; +\infty)$ și derivata sa este egală cu

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$$

3.3 Teorema de derivare a funcției inverse

- 1) Fie $f: I \rightarrow J$, I, J intervale, f continuă și bijectivă. Dacă f este derivabilă în punctul $x = x_0$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}: J \rightarrow I$ este derivabilă în punctul $f(x_0) = y_0$ și mai mult:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dacă $f'(x_0) = 0$, atunci $(f^{-1})'(y_0) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } f \text{ este crescătoare} \\ -\infty, & \text{dacă } f \text{ este descrescătoare.} \end{cases}$

- 2) Dacă $f: I \rightarrow J$, I, J intervale, f continuă și bijectivă este o funcție derivabilă pe I și $f'(x_0) \neq 0, \forall x \in I$. Atunci $f^{-1}: J \rightarrow I$ este derivabilă pe J și mai mult

$$(f^{-1})'(f) = \frac{1}{f'}$$

3.3.1 Consecințe ale teoremului de derivare a funcției inverse

1. Funcția exponentială

Fie $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $\forall a > 0, a \neq 1$. Deci $y = \log_a x$, iar $x = a^y$.

Se știe că această funcție este continuă, bijectivă, derivabilă și

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \neq 0,$$

iar inversa este funcția ,

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty), f^{-1}(y) = a^y,$$

adică funcția exponentială de bază a . Avem

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = x \ln a = a^y \ln a, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Așadar, funcția exponentială de bază a ,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty) f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$$

este derivabilă pe \mathbb{R} și

$$(a^x)' = a^x \ln a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $a = e$ atunci

$$(e^x)' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă u este o funcție derivabilă, atunci

$$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$$

și

$$(e^u)' = e^u \cdot u'.$$

2. Funcția arcsinu

Fie,

$$f: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1], f(x) = \sin x,$$

care se știe că este continuă, bijectivă și

$$f'(x) = \cos x \neq 0 \text{ pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Prin urmare se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse

$$f^{-1}: [-1; 1] \rightarrow: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(y) = \arcsin y.$$

Fie $y_0 \in (-1; 1)$, arbitrar. Avem

$$\arcsin y_0 = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Dacă,

$$y_0 = -1, \text{ atunci } x_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ și } f'(x_0) = 0.$$

Cum f este strict crescătoare avem

$$(\arcsin)'(-1) = \infty.$$

Analog dacă,

$$y_0 = 1,$$

Atunci

$$x_0 = \frac{\pi}{2}$$

și

$$f'(x_0) = 0 \text{ când } (\arcsin)'(1) = \infty.$$

Așadar, funcția arccosinus,

$$f(x) = \arccos x$$

este derivabilă pe $(-1; 1)$ și

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall x \in (-1; 1).$$

În plus,

$$(\arccos)'(-1) = (\arccos)'(1) = \infty.$$

Dacă u este o funcție derivabilă cu

$$|u(x)| < 1,$$

atunci

$$(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

3. Funcția arccosinus

Se consideră,

$$f: [0; \pi] \rightarrow [-1; 1], f(x) = \cos x.$$

Se știe că f este bijectivă, continuă și

$$f'(x) = -\sin x, x \neq 0, \text{dacă } x \in (0; \pi).$$

Funcției inverse

$$f^{-1}: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi], f^{-1}(y) = \arccos y$$

Îl se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse.

Se cunoaște de la trigonometrie formula

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}, \forall y \in [-1; 1].$$

Dacă $y \in (-1; 1)$, atunci din această formulă prin derivare se obține

$$(\arccos y)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin y)' = -(\arcsin y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dacă $y = -1$, atunci

$$(\arccos)'(-1) = -\infty,$$

iar pentru $y = 1$ avem

$$(\arccos)'(1) = -\infty,$$

deoarece funcția \arccos este strict descrescătoare.

Așadar, funcția \arccosinus ,

$$f(x) = \arccos x$$

este derivabilă pe $(-1; 1)$

și

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1; 1).$$

În plus,

$$(\arccos)'(-1) = (\arccos)'(1) = -\infty.$$

Dacă u este o funcție derivabilă cu $|u| < 1$, atunci

$$(arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

4. Funcția arctangentă

Fie

$$f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x,$$

care este continuă, bijectivă și

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Funcției inverse

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$$

și i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse.

Fie $y_0 \in \mathbb{R}$, arbitrar. Atunci,

$$(\operatorname{arctg} y)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Așadar, funcția arctangentă,

$$f(x) = \operatorname{arctg} x,$$

este derivabilă pe \mathbb{R} și

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă u este o funcție derivabilă, atunci

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

5. Funcția arccotangentă

Fie,

$$f: (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x,$$

o funcție continuă, bijectivă și

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \neq 0, \forall x \in (0; \pi).$$

Funcția inversă este

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi), f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y$$

și i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse.

Vom utiliza însă relația

$$\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

care prin derivare dă

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Așadar, funcția arccotangentă ,

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

este derivabilă pe \mathbb{R} și în plus,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă u este o funcție derivabilă, atunci

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

6. Derivata logaritmică

Pentru determinarea derivatei unei funcții este mai ușor să luăm , la început , logaritmul natural al acelei funcții, adică

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Așadar derivata logaritmică a acestei funcții, este

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

3.4 Reguli de derivare

Teoreme clasice ale analizei matematice

Teorema lui Fermat : Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și x_0 un punct din interiorul lui D . Dacă x_0 este punct de extrem (local) al funcției f și f este derivabilă în x_0 , atunci

$$f'(x_0) = 0.$$

Consecință. Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis I , atunci punctele de extrem local ale funcției f se găsesc printre zerourile derivatei f' (numite și puncte critice).

Teorema lui Rolle. Fie o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = 0.$$

Consecințe. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis I .

1. Între două zerouri consecutive ale funcției f se află cel puțin un zerou al derivatei f' .

2. Între două zerouri consecutive ale derivatei f' se află cel mult un zerou al funcției f .

Teorema lui Lagrange. Fie o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) , atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Consecințe.

1. Dacă o funcție derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acel interval.

2. Două funcții derivabile care au derivatele egale pe un interval diferă printr-o constantă.

3. Fie f o funcție derivabilă pe un interval I . Dacă

$$f'(x) > 0, (\forall)x \in I,$$

atunci f este strict crescătoare pe I . Dacă

$$f'(x) < 0, (\forall)x \in I,$$

atunci f este strict descrescătoare pe I .

4. Fie o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval $x_0 \in I$. Dacă f este continuă pe I , derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și există

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R},$$

atunci f are derivabilă în x_0 și

$$f'(x_0) = l.$$

Teorema lui Darboux. Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I , atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe I .

Regulile lui l'Hospital.

Cazul $\frac{0}{0}$. Fie I un interval, x_0 punct de acumulare al lui I și f, g două funcții definite pe $I \setminus \{x_0\}$.

Dacă

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

(ii) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

(iii) $g'(x) \neq 0, g'(x) \neq 0, (\forall)x \in I \setminus \{x_0\}$;

$$(iv) \text{ există } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

atunci există și limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ egală tot cu } l.$$

Cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Fie I un interval, x_0 punct de acumulare al lui I și f, g două funcții definite pe $I \setminus \{x_0\}$.

Dacă:

$$(i) \lim_{g \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty;$$

(ii) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

(iii) $g'(x) \neq 0, (\forall)x \in I \setminus \{x_0\}$;

$$(iv) \text{ există } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

atunci există și limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ egală tot cu } l.$$

3.5 Rolul derivatei a două în studiul funcțiilor

Fie f o funcție de două ori derivabilă pentru un interval I . Dacă $f''(x) \geq 0, (\forall)x \in I$, atunci f este convexă pe I . Dacă $f''(x) \leq 0, (\forall)x \in I$, atunci f este concavă pe I .

Fie $f: D \rightarrow R$ o funcție de două derivabilă pe D și $x_0 \in D$. Dacă există $a, b \in D$ astfel încât

- 1) $a < x_0 < b$;
- 2) $f''(x_0) = 0$;
- 3) $f'' < 0$ pe (a, x_0) și $f'' > 0$ pe (x_0, b) sau invers (adică $f'' > 0$ pe (a, x_0) și $f'' < 0$ pe (x_0, b)), atunci x_0 este punct de inflexiune pentru f .

Capitolul IV

PRIMITIVE

4.1 Noțiuni introductive

În orice curs de Analiză matematică acest capitol urmează celui care se referă la derivate. Este deci util să fie bine cunoscut acesta din urmă și evident celelalte capitole ce-l preced pe cel numit derivate.

Semnalăm, aici, o practică des utilizată în rândul matematicienilor, care se referă la anumite expresii ca: este evident, se vede ușor, se știe că, se găsește ușor, este bine cunoscut, etc. și care pentru cititorul obișnuit trebuie să însemne: reflectează. Noțiunea de primitivă legată între cele două concepte fundamentale ale Analizei matematice, derivata și integrala.

Integrarea este considerată ca operație inversă (într-un anume sens) a derivării. Propunem în continuare un exemplu de operații inverse pentru a ilustra unele caracteristici ale acestora.

Exemplu

Fiind date două numere reale oarecare a, b , atunci se poate calcula suma lor astfel:

$$s = a + b.$$

Invers, se pot determina perechile de numere $a, b \in \mathbb{R}^2$ cu suma s cunoscută. Există o infinitate de astfel de cupluri (sunt situate pe o dreaptă de ecuație $x + y = s$). Deci în acest caz problema are o infinitate de soluții. și exemplele pot continua.

4.2 Metode de calcul al părtitivelor

4.2.1 Metoda integrării prin părți

O primă metodă ce permite calcularea integralelor unor funcții date este oferită de integrarea prin părți. Are loc următorul rezultat important:

Teorema: Dacă $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I interval) sunt funcții derivabile continue, atunci funcțiile $f' \cdot g$ și $f \cdot g'$

admit primitive și mulțimile lor de primitive sunt legate prin relația:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

4.2.2 A doua metodă de schimbare de variabilă:

Teorema: Fie, I, J intervalele din \mathbb{R} și $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ două funcții cu următoarele proprietăți:

- 1) φ este bijectivă derivabilă cu $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in I$
- 2) funcția $h = (f * \varphi)\varphi'$ adminte primitive (fie H o primitivă a sa).

Atunci:

- a) funcția f admite primitive
- b) funcția $H * \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f , adică

$$\int f(x) dx = (H * \varphi^{-1})(x) + C.$$

4.2.3 Integrarea funcțiilor raționale

Definiție: O funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, se numește **rațională**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

unde P, Q sunt funcții polinomiale cu coeficienți reali și $Q(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple

Definiție: O funcție rațională se numește **simplă** dacă are una din formele:

$$1) f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ (funcția polinomială)}$$

$$2) f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, n \in \mathbb{N}^*, x \in I \subset (-\infty, a) \text{ sau } I \subset (a, \infty)$$

$$3) f(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}, n \in \mathbb{N}^*, b^2 - 4c < 0$$

Următoarea teoremă de algebră este fundamentală pentru integrarea funcțiilor rationale.

Teoremă. Orice funcție rațională poate fi reprezentată sub forma unei sume finite de funcții rationale simple. Mai precis, dacă

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_p)^{\alpha_p} (x^2 - b_1 x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_q x + c_q)^{\beta_q},$$

unde

$$b_i^2 - 4c_i < 0, i = \overline{1, q},$$

atunci,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} = \\ &= L(x) + \sum_{k=1}^p \left[\frac{A_k^1}{x-a_k} + \frac{A_k^2}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_k^{\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} \right] + + \sum_{k=1}^q \left[\frac{B_k^1 x + C_k^1}{x^2 + b_k x + c_k} + \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{B_k^{\beta_k} x + C_k^{\beta_k}}{x^2 + b_k x + c_k^{\beta_k}} \right], \end{aligned}$$

unde L este o funcție polinomială cu coeficienți reali, iar $p, q \in \mathbb{N}^*$, a_k, b_k, c sunt numere reale $b_k^2 - 4c_k < 0$.

Capitolul V

Aplicații Mathematica

În acest capitol am dezvoltat cu ajutorul programului *Mathematica* aplicații care rezolvă diferite probleme și exerciții de analiză matematică școlară. Aceste aplicații pot fi introduse la clasă în lecții aplicative, favorizând o mai bună înțelegere de către elevi a noțiunilor studiate, reprezentând totodată o metodă modernă de predare a analizei matematice ce completează metodele clasice.

5.1 Limite. Aplicații

1. Limita funcției polinomiale

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} (-3x^2 + 2x + 5)$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^3 - x^3)$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 5)$

2. Limita funcției rationale

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+3)}{2x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-7x-30}{21x^2+14x-35}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-7x-30}{21x^2+14x-35}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-7x-30}{21x^3+14x-35}$

3. Limita funcției radical

- a) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x}$

4. Limita funcției exponentiale

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4^x$
- e) $\lim_{x \rightarrow 3} 2^x$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x$$

5. Limita funcției logaritmice

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \log_3 x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_2 x$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2 x$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_2 x$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$

6. Limitele funcțiilor trigonometrice directe

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x$

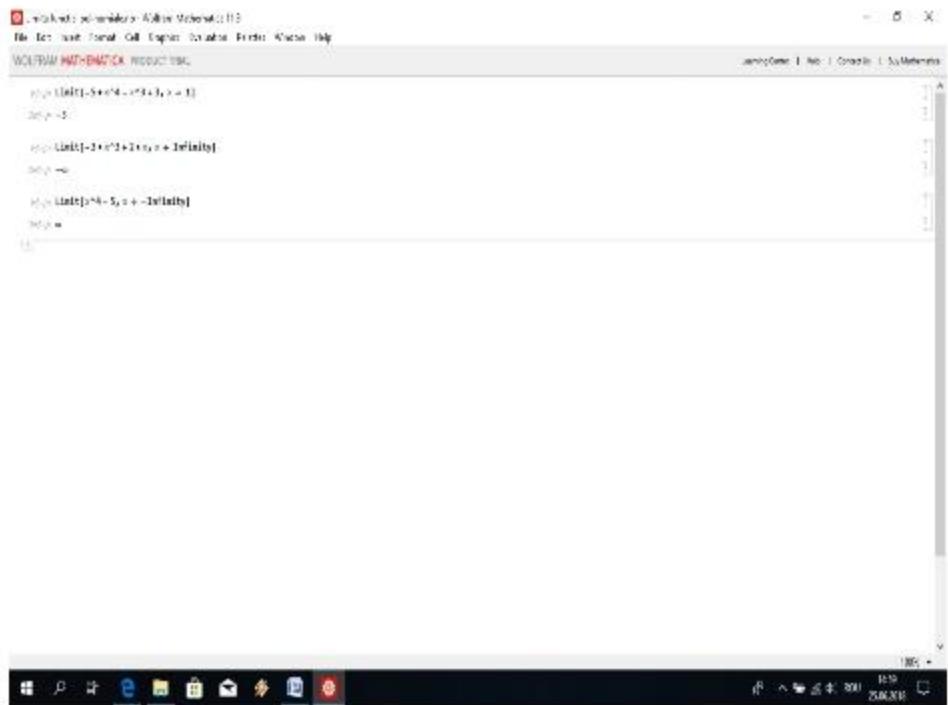
7. Limitele funcțiilor trigonometrice inverse

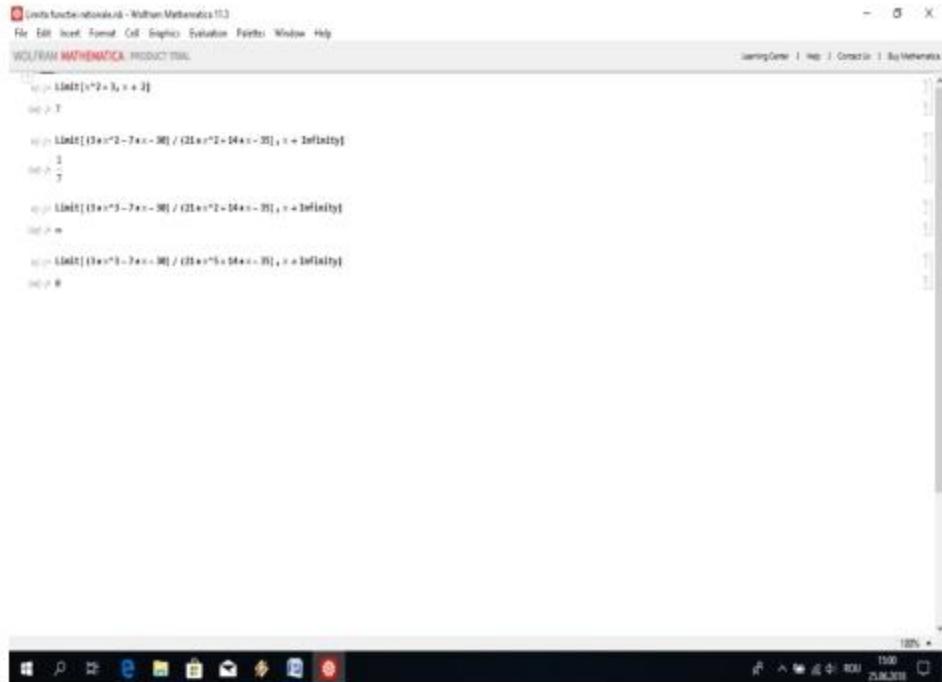
a) $\lim_{x \rightarrow -1} \arcsin x$

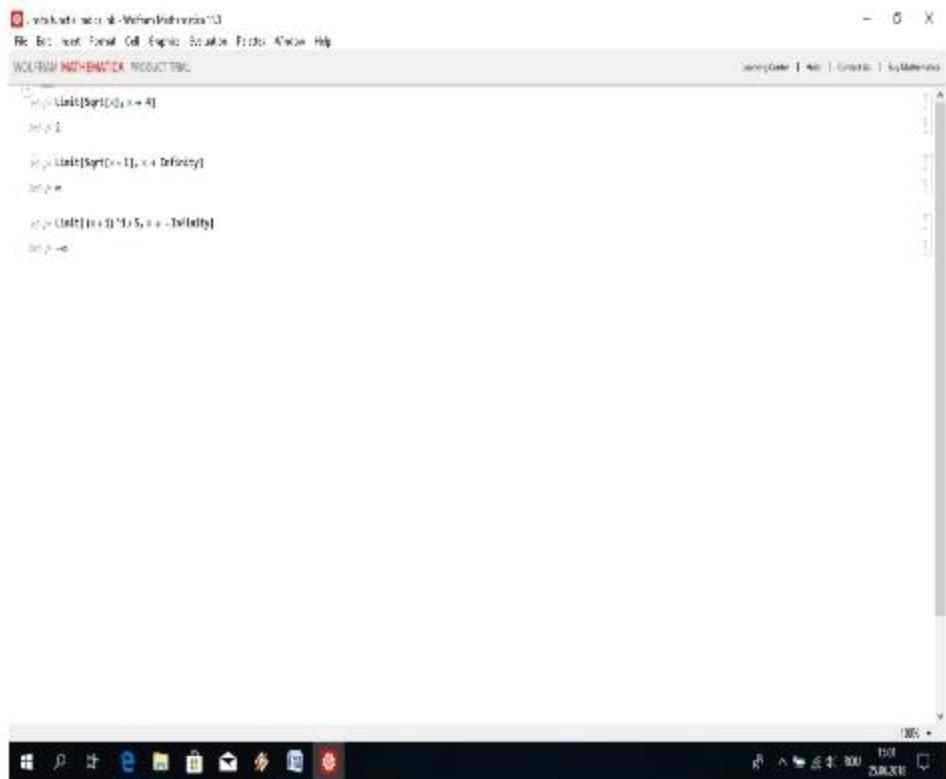
b) $\lim_{x \rightarrow -1} \arccos x$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \arctg x$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} x$

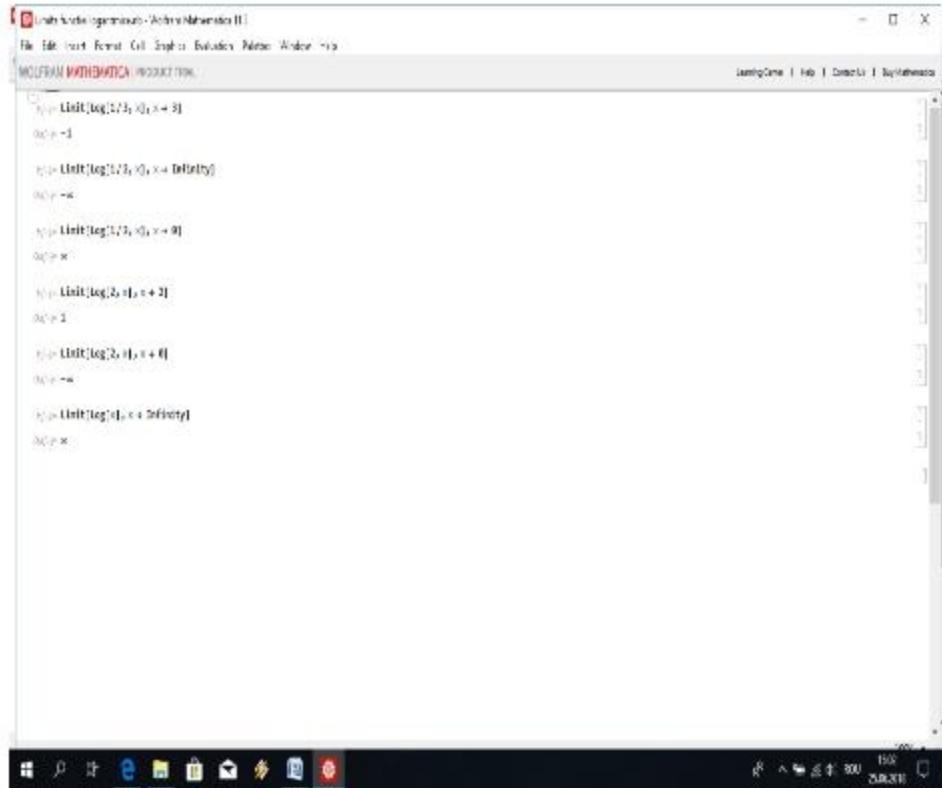


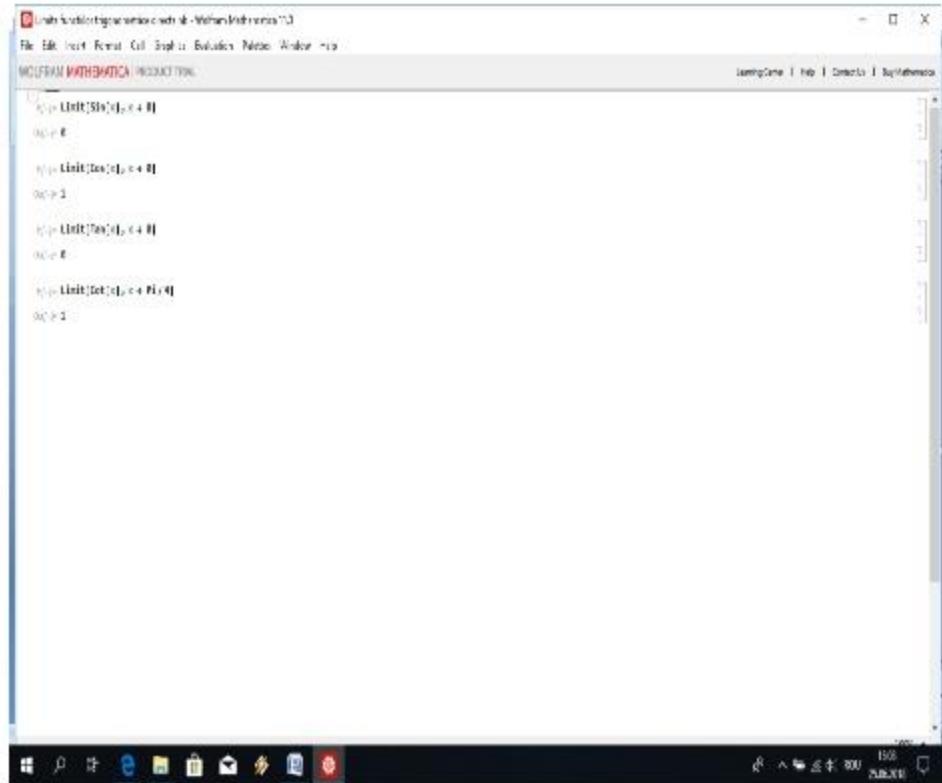




The screenshot shows the Wolfram Mathematica 11.3 interface. The menu bar includes File, Edit, Insert, Format, Cell, Graphics, Evaluation, Palettes, Window, Help, and WOLFRAM MATHEMATICA PRODUCT TRIAL. The toolbar below the menu bar includes icons for New, Open, Save, Copy, Paste, Evaluate, and others. The main workspace displays the following Mathematica session:

```
In[1]:= Limit[(t/2)^x, x->3]
Out[1]= 1
In[2]:= Limit[(t/3)^x, x->infinity]
Out[2]= 0
In[3]:= Limit[(t/3)^x, x->-infinity]
Out[3]= \[Infinity]
In[4]:= Limit[4^x, x->3]
Out[4]= 64
In[5]:= Limit[2^(x/2), x->infinity]
Out[5]= \[Infinity]
In[6]:= Limit[(5^x)/x, x->-infinity]
Out[6]= 0
```

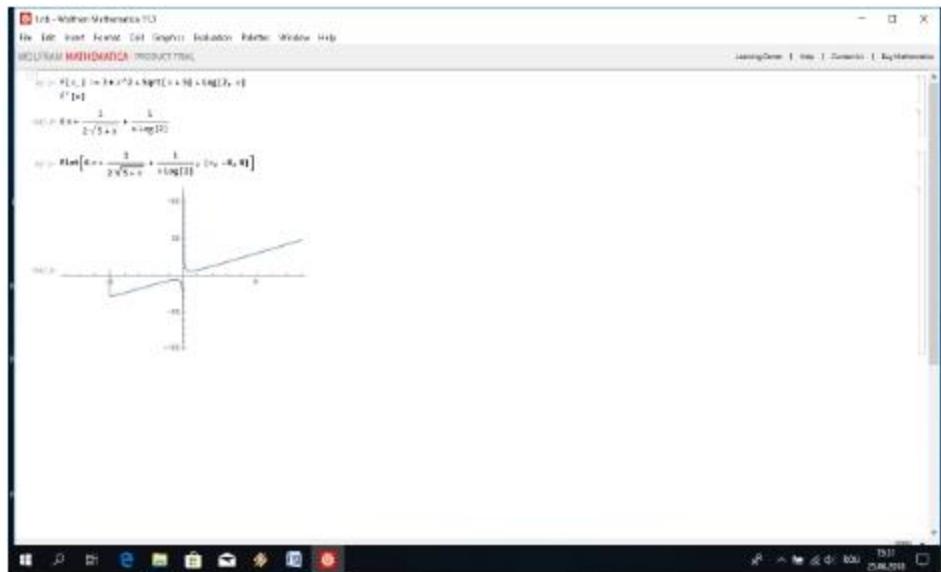


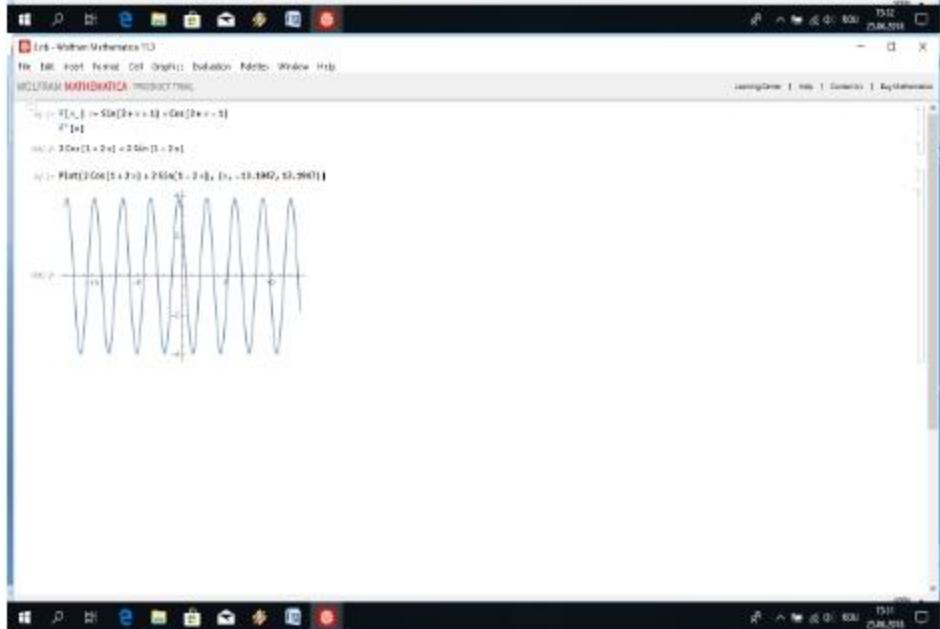


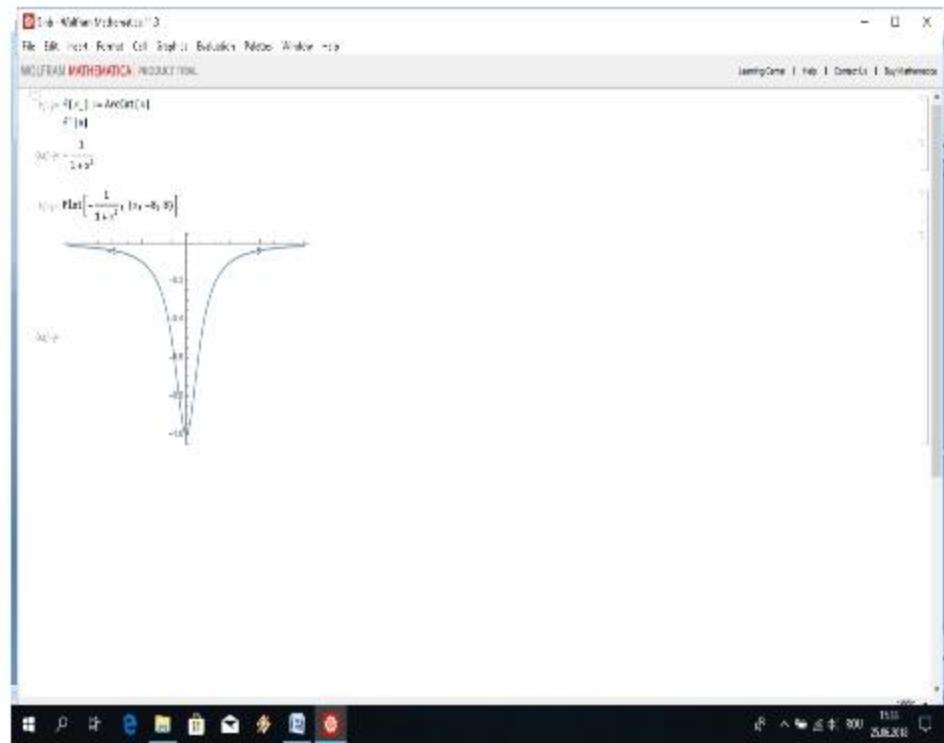
Unit[Unit[#, \\$MachinePrecision, 1], 1 + -1]
0.577
Unit[Unit[#, \\$MachinePrecision, 1], 1 + -1]
0.577
Unit[Unit[#, \\$MachinePrecision, 1], 1 + -1]
0.577
Unit[Unit[#, \\$MachinePrecision, 1], 1 + -1]
0.577

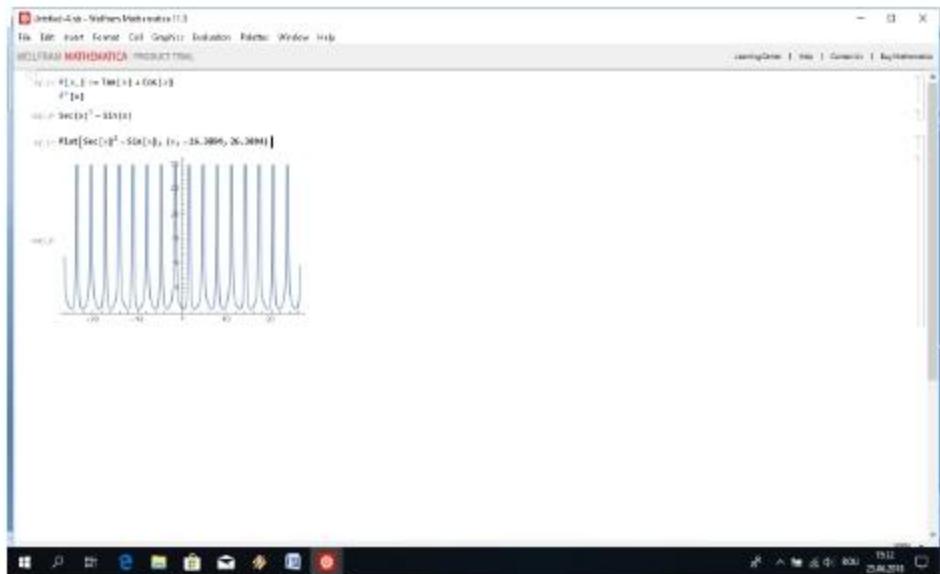
5.2 Derivate. Aplicații

1. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x+5} + \log_2 x$
2. $f(x) = \sin(2x+1) + \cos(2x-1)$
3. $f(x) = x^4 - \ln x + e^x$
4. $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$
5. $f(x) = \arctg x$



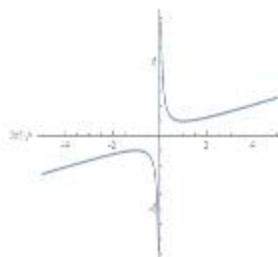






5.3 Integrale. Aplicatii

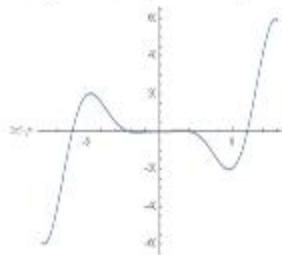
1. $\int \frac{1}{x^2} \cdot e^x \, dx$
2. $\int x^2 \cos x \, dx$
3. $\int x^2 \sqrt{1+x^2} \, dx$
4. $\int \frac{x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1} \, dx$
5. $\int 2^x \sqrt{4^x - 1} \, dx$
6. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} \, dx$
7. $\int \frac{3x^2+12x+11}{x^3+6x^2+11x+6} \, dx$
8. $\int \frac{x^2+2x+5}{(x+1)^4} \, dx$
9. $\int x \sin x \, dx$
10. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} \, dx$
11. $\int (x^3 + x + 1)e^x \, dx$
12. $\int x \ln x \, dx$
13. $\int \sqrt{x^2 - 9} \, dx$
14. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \, dx$
15. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \, dx$
16. $\int \frac{2x^2+6x+6}{(x+1)(x^2+5x+6)} \, dx$
17. $\int \frac{4x+1}{(x+1)^3} \, dx$

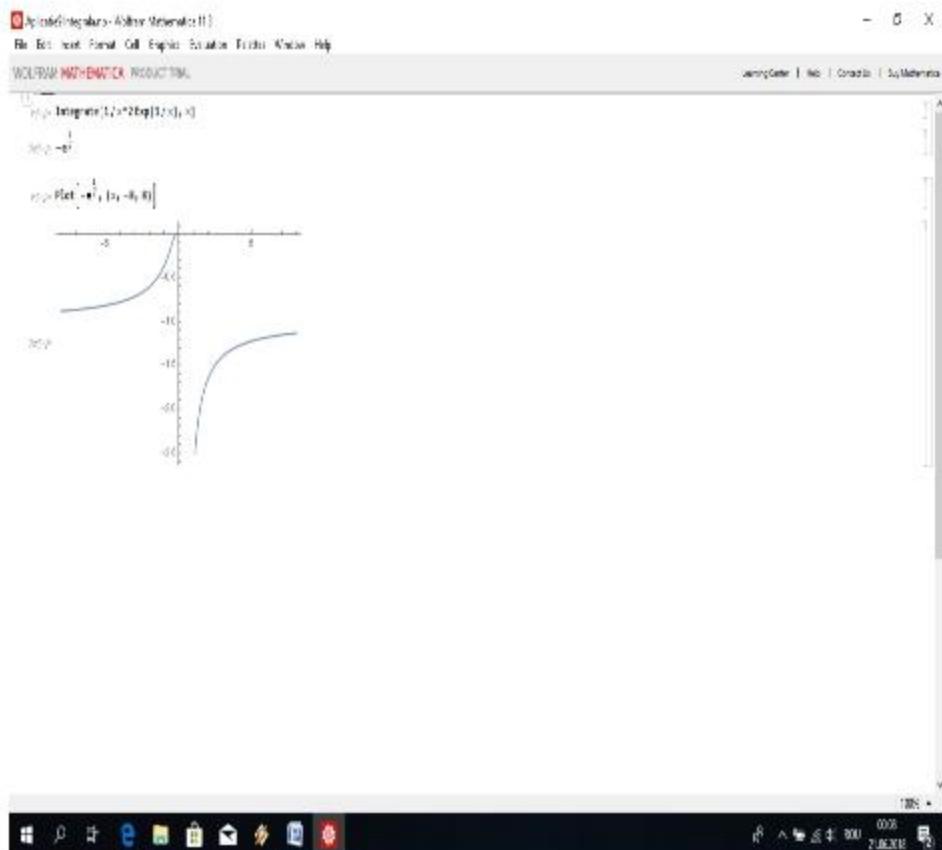
$\text{Plot}[f, \{x, -10^3, 10^3\}, \{y, -10^3, 10^3\}]$ $\text{UnitStep}[x], x > 0]$ $\text{Plot}[f], x \in (-5, 5)]$ $x \in \mathbb{R}$ 

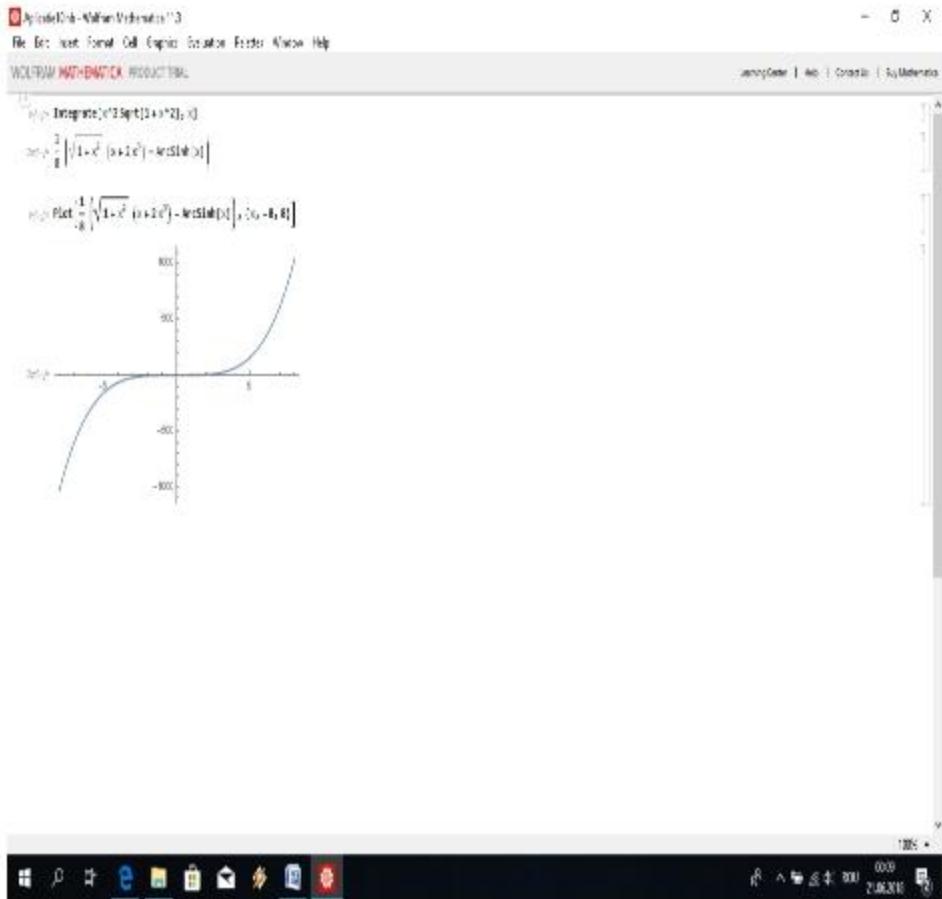
In[1]:= Integrate[x^2 Sin(x), x]

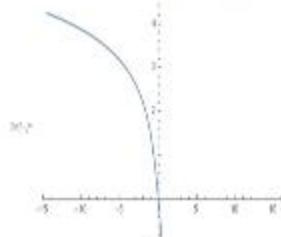
Out[1]:= x Cos(x) + (-2 + x^2) Sin(x)

In[2]:= Plot[2 x Cos(x) + (-1 + x^2) Sin(x), {x, -8, 8}]





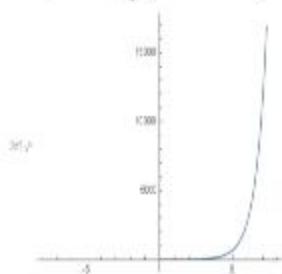


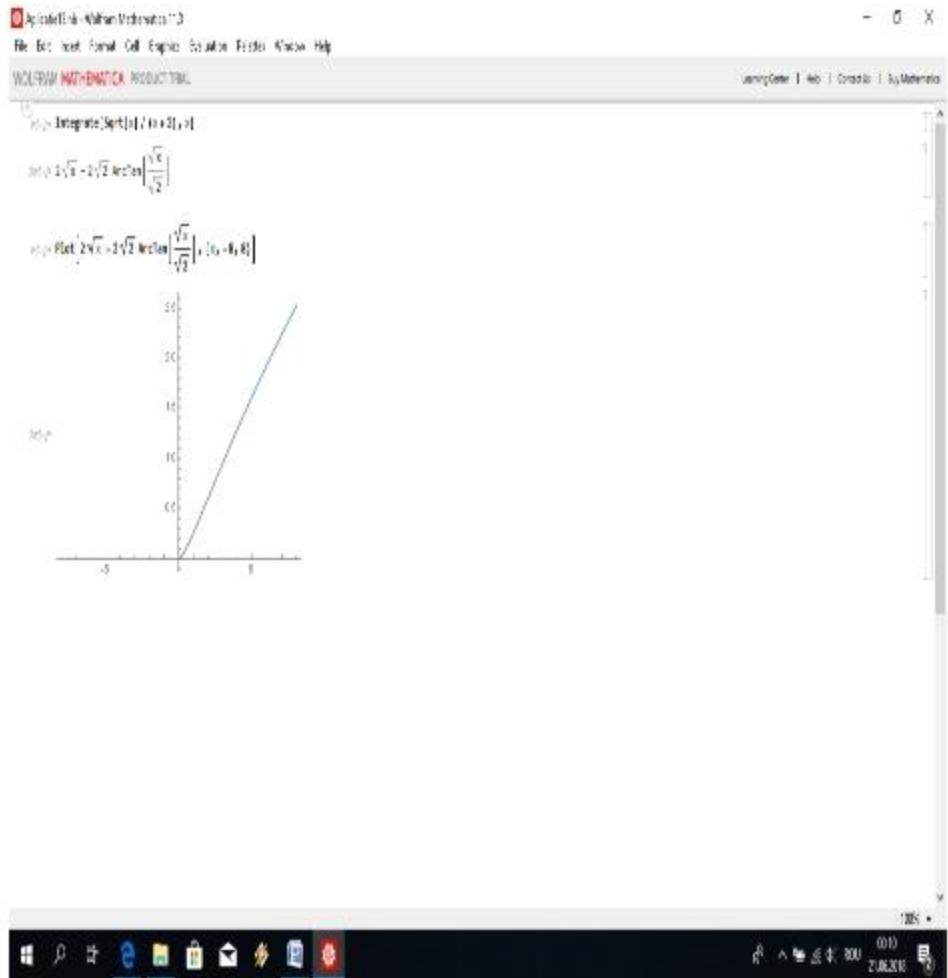
$$\text{r1} = \text{Integrate}\left(\frac{(x^2-x+1)}{\left(x^4-x^2+x-1\right)}, x\right)$$
$$\text{r2} = -\text{ArcTan}[x] + \log[1-x]$$
$$\text{r3} = \text{Plot}\left[-\text{ArcTan}[x] + \log[1-x], \{x, -10.5, 15.5\}\right]$$


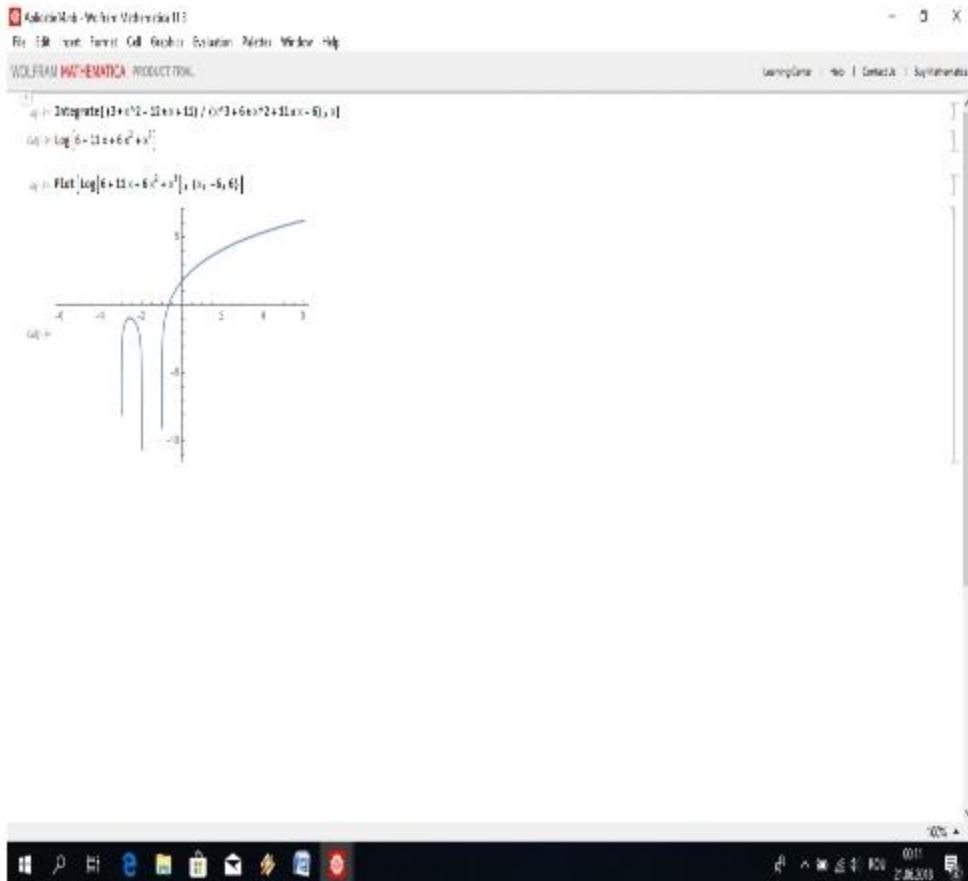
$$\text{In[1]:= } \text{Integrate}[2^x \sqrt{\text{Sqrt}[16^x - 1]}, x]$$

$$\text{Out[1]:= } \frac{2^x \sqrt{-1 + 4^x} + \log\left[2^x \sqrt{-1 + 4^x}\right]}{\log[4]}$$

$$\text{In[2]:= } \text{Plot}\left[\frac{2^x \sqrt{-1 + 4^x} + \log\left[2^x \sqrt{-1 + 4^x}\right]}{\log[4]}, \{x, -4, 8\}\right]$$







Aplikace > Výkres funkce

- 0 X

File Edit Insert Cell Graphic Evaluate Notes Help

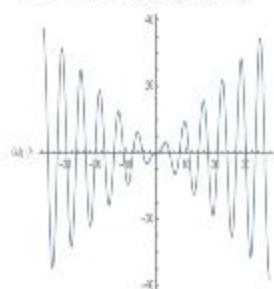
MATHEMATICA PRODUCT TUTORIAL

Language | Rig | Output | Advanced

In[1]:= Integrate[Sin[x]*x^2,x]

Out[1]:= -x^2 Sin[x] + Sin[x]

In[2]:= Plot[-x^2 Sin[x] + Sin[x], {x, -10.690, 10.690}]



Wolfram Alpha | About Wolfram Alpha | Help
Re: Bot | Test | Send Off | Export | Create | Print | Know | Help

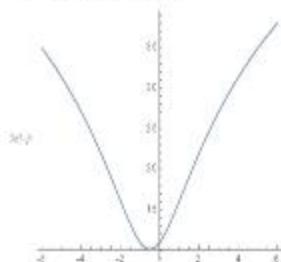
WOLFRAM MATHEMATICA PRODUCTIVE

Wolfram | Web | Cloud | My Account

In[1]:= Integrate[(2(x+3)/(x^2+x+3)),x]

Out[1]:= (2 Log[3 + x + x^2])

In[2]:= Plot[(2 Log[3 + x + x^2]),{x,-6,6}]



A screenshot of the Wolfram Mathematica interface. The top menu bar includes "Akademie-Einst." (Academic Edition), "Wolfram Mathematica 8.0", "File", "Edit", "View", "Format", "Cell", "Inplace", "Calculator", "Palette", "Window", and "Help". Below the menu is the product name "WOLFRAM MATHEMATICA PRODUCT TRIAL". The main workspace shows a command input cell and its output. The input cell contains:


```
i1 := Integrate[(x^2+2x+5)/(x-1)^3, x]
```

 The output cell displays the result as a rational function:

$$\frac{1+3x+x^2}{(x-1)^3}$$
 Below this, another input cell shows a plot command:


```
i2 := Plot[1/(x-1)^3, {x,-1,8}]
```

 The resulting plot is shown in the workspace, featuring a vertical asymptote at $x=1$ where the function goes to positive infinity, and a curve that approaches the x-axis as x goes to negative infinity or positive infinity.

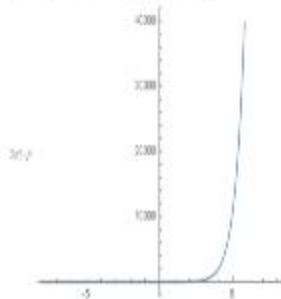
Aplicativo - Nível Universitário 1.3
Re: Buscar Formulário Envio Gerador Fórmulas Ajuda Help
INFORME MATHEMATICA PRODUTIVO

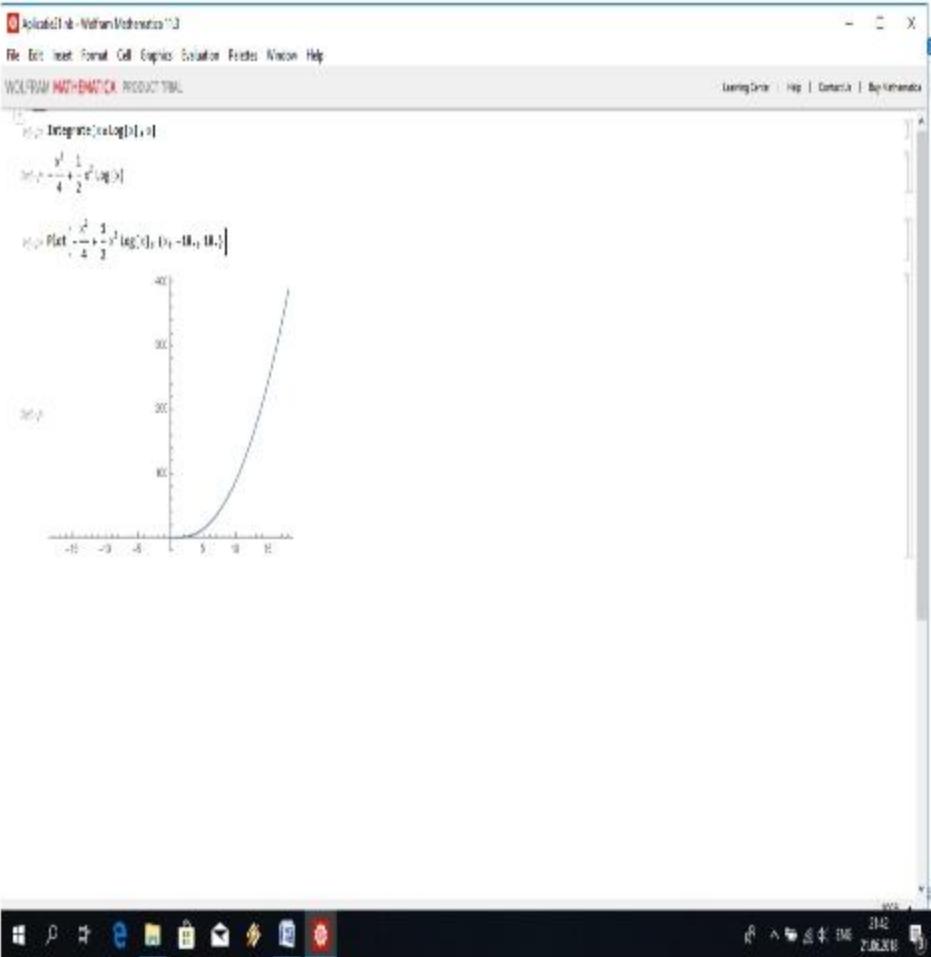
Logout | Ajuda | Contato | Sobre Mathe

Início > Integrate[(x^3+1)/(x^2+1),x]

Out[1]= $x^3 + 1 - 6x^2 - 3x^4 + x^6$

In[2]:= Plot[x^3 + 1 - 6x^2 - 3x^4 + x^6, {x, -3, 0}]





SymboleLink-Nihon University 1.0

Re Ent Cont Calc Caprio Integrate Freqs Know Help

WOLFRAM MATHEMATICA 9.0.1

LearningCenter | Neo | Contact | Sub-Materials

$\int_0^x \frac{1}{t} \operatorname{Integrate}\left[\operatorname{Sqrt}\left(t^2-8\right), t\right] dt$

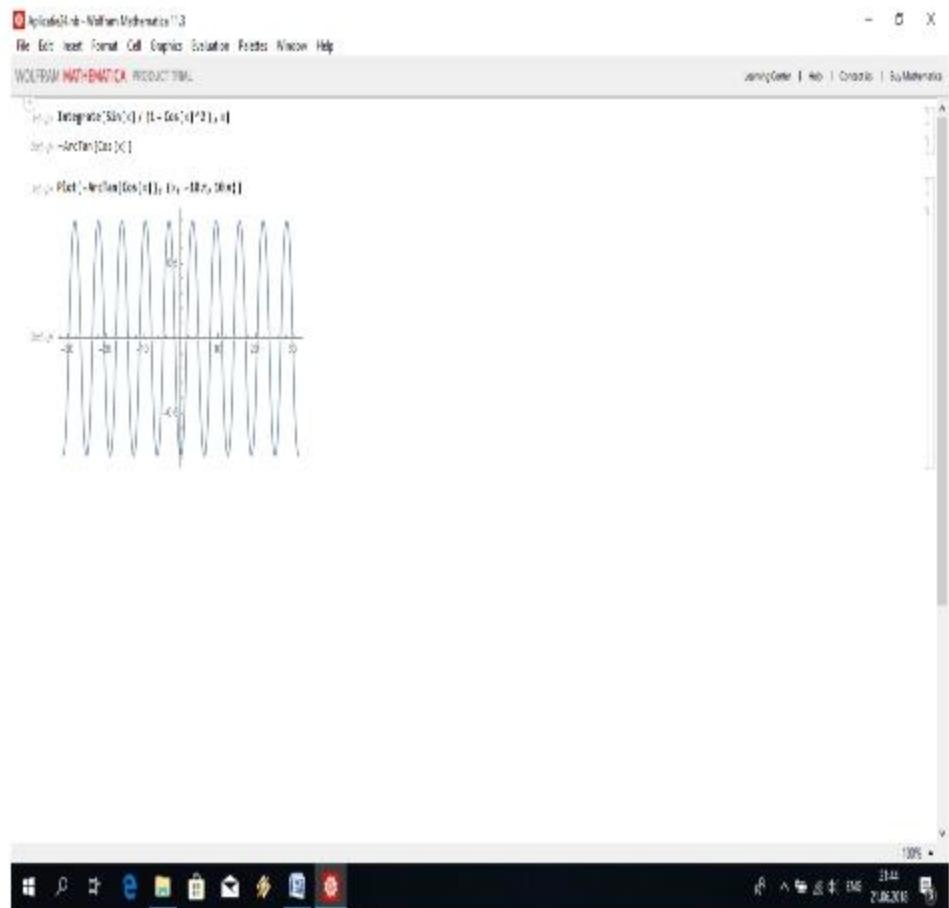
$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{t} \cdot 2 \sqrt{-8+t^2}-\frac{8}{t} \log \left[t+\sqrt{-8+t^2}\right] dt$

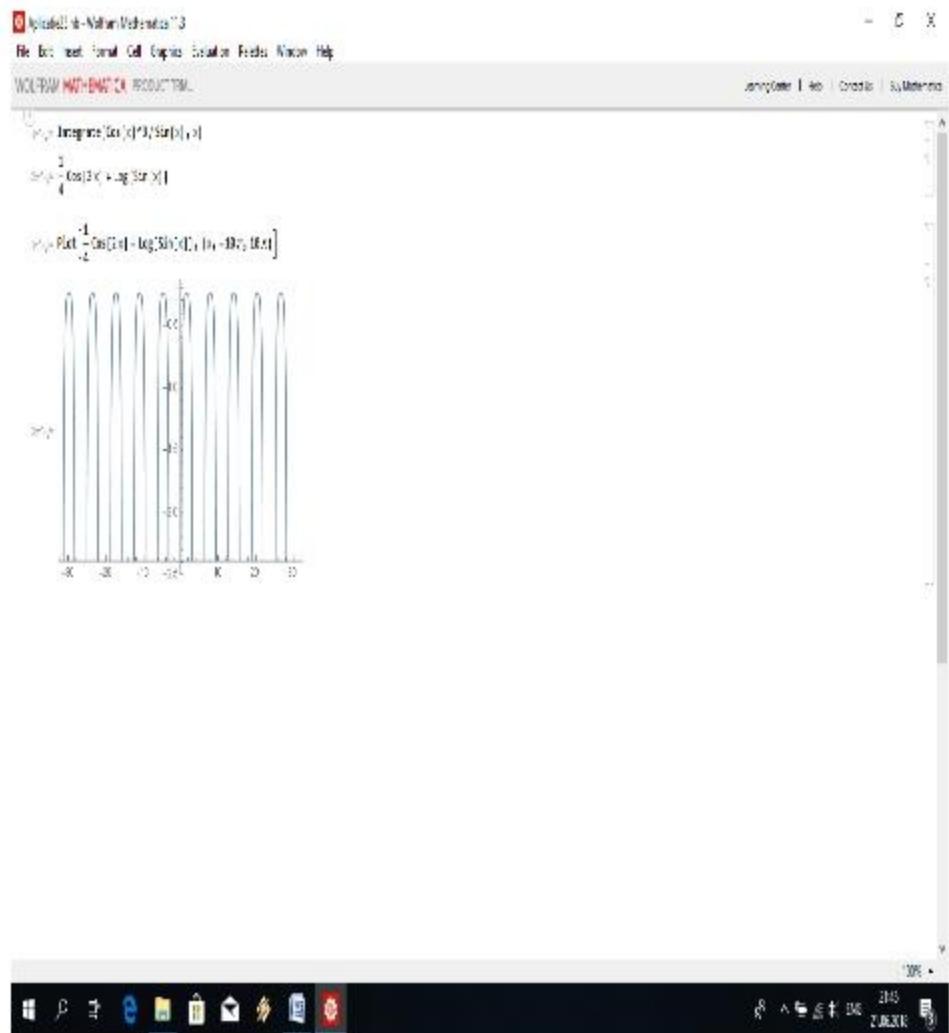
$\Rightarrow \int_0^x \left[\frac{1}{t} \cdot 2 \sqrt{-8+t^2}-\frac{8}{t} \log \left[t+\sqrt{-8+t^2}\right] \right] dt \rightarrow \text{Df}(-8, 0)$

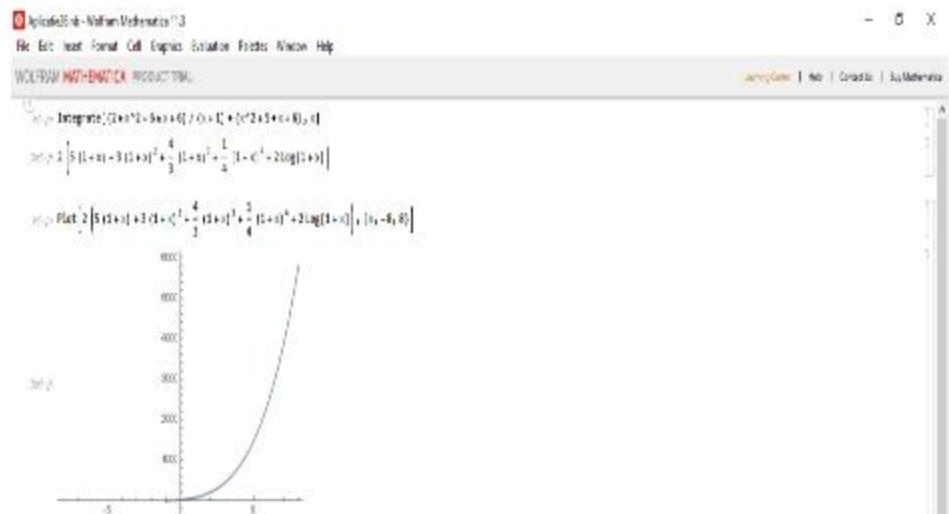
Graph of $f(x)$

100%

File Edit View Insert Cell Kernel Help 20.8.2018







Concluzii

Lucrarea de față își propune abordarea rezolvării unor probleme clasice de analiză matematică prin aplicații inovative, cum ar fi programul Mathematica.

Lucrarea este constituită din cinci capitole, primele patru tratând partea teoretică, iar cel din urmă, partea aplicativă.

În primele capitole ale lucrării sunt prezentate noțiuni de bază referitoare la elemente de analiză matematică, iar în al cincilea sunt abordate aplicații ale unor exerciții și probleme de analiză matematică școlară, rezolvate prin intermediul programului Mathematica.

Având în vedere dezvoltarea din ce în ce mai rapidă în materie de tehnologie informatică și a interesului pe care aceasta îl trezește copiilor, optarea pentru utilizarea acestor aplicații moderne vine în sprijinul actului educațional și implicit în dezvoltarea eficientă a învățării.

Partea teoretică a lucrării este susținută de exemple care își propun să întărească și să evidențieze aplicabilitatea temei abordate.

Consider că de-a lungul timpului tehnologia și-a făcut simțită prezența tot mai mult, iar prin intermediul programului Mathematica reusim să abordăm rezolvarea multor probleme provenite de știință, iar elevii reușesc să percepă matematica și dintr-un alt unghi, un mare avantaj fiind graficele pe care le putem realiza cu ajutorul acestui programului pentru o multitudine de funcții.

În încheiere amintesc faptul că programul Mathematica este un software pentru calcul matematic. Prin intermediul acestui program se poate efectua atât calcul numeric, cât și simbolic. Rezolvă ecuații algebrice și diferențiale, calculează derivate, primitive și integrale definite, sume și produse, serii de funcții. Execută diverse operații asupra matricelor, factorizează polinoame, analizează date, desenează grafice și animații. De aceea, el poate fi introdus cu succes ca metodă modernă de învățare în matematică școlară.

Bibliografie

1. Mircea Ganga, *Manual pentru clasa a XI-a*, Editura Mathpress, 2007;
2. Mircea Ganga, *Manual pentru clasa a XII-a*, Editura Mathpress, 2007;
3. Zanoschi Adrian, Iurea Gheorghe, POpa Gabriel, Răducanu Petru, Șerdean Ioan, Matematica, Mate-Info, Bacalaureat 2015, Teme recapitulative, Paralela 45, 2015;
4. Hazrad Roozbeh, *Mathematica: A problem-Centred Approach*, Springer, 2000;
5. Shingareva Inna, Lizarraga-Carlos, *Maple and Mathematica, A Problem Solving Approach for Mathematics*, Springer, 2007;
6. Abell Martha, Braselton James, *Mathematica by Example, Mathematica5*, 2004.